

# ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

## ΤΜΗΜΑ Α-Κ

Εξ αποστάσεως μη επιτηρούμενη γραπτή εξέταση

Ιούνιος 2020

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 30 λεπτά

## ΟΔΗΓΙΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ

Μπορείτε να γράψετε τις απαντήσεις σας με στυλό σε αριθμημένες κόλλες ώστε να είναι ευδιάκριτες όπως όταν γράφετε εξετάσεις δια ζώσης.

Στην αρχή των απαντήσεών σας θα γράψετε το **Όνοματεπώνυμο** και τον **Αριθμό Μητρώου** σας.

Μόλις τελειώσετε με τις απαντήσεις σας, θα τις σκανάρετε και θα τις αποθηκεύσετε με τον αριθμό μητρώου σας σε αρχείο το οποίο θα πρέπει να αναρτήσετε στο σύστημα MsTeams εντός του ορισμένου χρονικού διαστήματος. **Δεν θα γίνουν δεκτά αρχεία που θα αναρτηθούν σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα ή ηλεκτρονική διεύθυνση.**

Δεν χρειάζεται να αναρτήσετε τα πρόχειρά σας.

**Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας πλήρως.**

ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΝ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. (Μόρια 10) Να γραφεί ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

στη μορφή

$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = QAP$$

με τη βοήθεια στοιχειωδών πινάκων.

2. (Μόρια 15) Στον  $\mathbb{R}$ -διανυσματικό χώρο  $\mathbb{R}^4$  θεωρούμε τα υποσύνολα

$$V = \{(x, y, z, w) \mid x + y + z = 0 \text{ και } x - z + 2w = 0\}$$

και

$$W = \{(x, y, z, w) \mid x - y - z = 0 \text{ και } x + z + 2w = 0\}.$$

Να δείξετε ότι είναι υπόχωροι και να προσδιοριστούν βάσεις και οι διαστάσεις των υποχώρων  $V, W, V \cap W$  και  $V + W$ . Υπάρχει υπόχωρος  $V'$  τέτοιος ώστε  $\mathbb{R}^4 = V \oplus V'$ ; Είναι μοναδικός;

3. (Μόρια 30) Έστω ο μετασχηματισμός  $T : \mathbb{R}[4] \rightarrow \mathbb{R}[3]$  με τύπο

$$T(f(x)) = f(x+1) - f(x)$$

(α') Βρείτε μια βάση του πυρήνα και μια βάση της εικόνας του  $T$ .

(β') Βρείτε τον πίνακα  $A$  της  $T$  στις κανονικές βάσεις.

(γ') Βρείτε τον πίνακα  $B$  της  $T$  στις βάσεις:

$$\{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2), x(x-1)(x-2)(x-3)\}$$

και

$$\{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2)\}.$$

4. (Μόρια 20) Έστω  $A$  ένας  $m \times n$  πραγματικός πίνακας με  $a_{i,j} = 0$  για  $i > j$  και  $b$  ένας  $m \times 1$ .  $Ax = b$  ως είναι το αντίστοιχο γραμμικό σύστημα.

(α') Βρείτε συνθήκες στον  $A$  ώστε το σύστημα  $Ax = b$  να είναι συμβιβαστό για όλα τα  $b$ .

(β') Βρείτε συνθήκες στον  $A$  ώστε το σύστημα  $Ax = b$  να έχει το πολύ μία λύση για κάθε  $b$ .

(Θέμα 5 και 6 στην πίσω σελίδα.)

5. (Μόρια 15) Έστω  $A$  ένας  $m \times n$  πραγματικός πίνακας και  $B$  ένας  $n \times m$  πραγματικός πίνακας ώστε  $AB = I$ . Δείξτε ότι
- (α') οι στήλες του  $B$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες,
  - (β') οι στήλες του  $A$  γεννούν τον  $\mathbb{R}^m$ .
6. (Μόρια 10) Έστω ο διανυσματικός χώρος  $\mathbb{R}[n]$  και  $\{f_0, f_1, f_2, \dots, f_n\}$  υποσύνολό του. Αν  $f_i(1) = 0$  για όλα τα  $i$ , τότε το σύνολο  $\{f_0, f_1, \dots, f_n\}$  είναι γραμμικά εξαρτημένο.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**